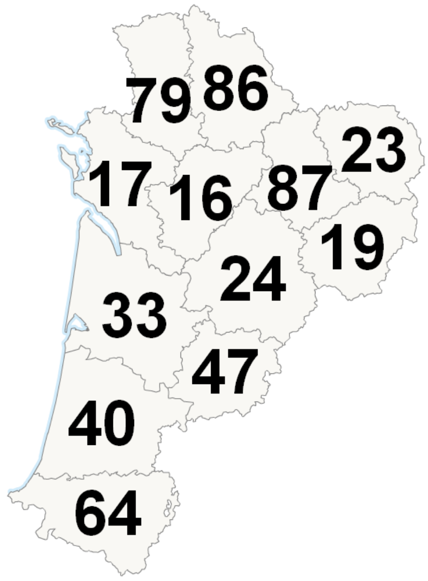
Corrigé du sujet lycée 2019

Voyage en Nouvelle-Aquitaine

Trois amis du Limousin veulent parcourir la région Nouvelle-Aquitaine, née de la fusion des anciennes régions :

- *Aquitaine (départements numéros 24, 33, 40, 47 et 64),*
- *Limousin (départements numéros 19, 23 et 87),*
- *Poitou-Charentes (départements numéros 16, 17, 79 et 86).*



Ils se sont fixé les règles suivantes :

- *le parcours doit commencer dans un département du Limousin,*
- *le parcours doit visiter tous les départements de la région Nouvelle-Aquitaine sans jamais la quitter,*
- *le parcours ne doit pas repasser par un département déjà visité.*

1) Où le parcours peut-il se terminer ?

Le parcours doit se terminer dans le département 64.
En effet il faut passer par ce département et pour y arriver il faut passer par le département 40. Comme on ne peut pas passer deux fois par le département 40, le voyage doit se terminer dans le département 64.

2) Donnez un parcours avec le moins possible de franchissements de limites d'anciennes régions. On donnera la liste des numéros des départements dans l'ordre suivi. Combien existe-t-il de tels parcours ?

Il y a trois anciennes régions, le minimum est donc de deux franchissements de limites d'anciennes régions. On essaie de parcourir tous les départements d'une ancienne région avant de passer à la suivante. Comme on doit commencer en Limousin et terminer par 64 en Aquitaine, l'ordre de franchissement des régions est Limousin, Poitou-Charentes et Aquitaine.

On observe qu'à l'intérieur du Limousin, 23 ne peut pas être en dernier et que si on sort du Limousin par 19, on ne peut aller qu'en Aquitaine, donc c'est 87 qui termine le Limousin.

C'est possible par exemple avec la liste suivante :
19, 23, 87, 86, 79, 17, 16, 24, 47, 33, 40, 64.

Il existe au total 22 parcours qui n'ont que deux franchissements de limites d'anciennes régions, ils sont décrits dans le diagramme suivant en allant de la gauche vers la droite :

```
                               17   →   16            47   →   33
                             /              \       /              \
19 → 23                  79                    24                  40 → 64
         \               /   \                /    \               /
          87   → 86           16            /       33           /
         /    \        \          \      /               \     /
23 → 19        \         16         17                     47
               \           \     /       \               /
                 \          79              33 → 24
                  \        /
                  16 → 86
```

3) Donnez un parcours avec le plus possible de franchissements de limites d'anciennes régions. Combien existe-t-il de tels parcours ?

Si on veut franchir 2 fois la limite du Limousin, on doit sortir par un département puis entrer et sortir par un autre. Seul 87 répond à cette deuxième condition. Donc on sort par 19 et entre par 87 après avoir franchi la limite Aquitaine/Poitou-Charente, ce qui donne 23-19-24-16-87-86 et il y a ensuite une seule façon de terminer. On a franchi 5 limites.

Si on ne franchit qu'une fois la limite du Limousin, on peut ensuite franchir au plus 2 fois celle de Poitou-Charente.
Il existe un unique parcours avec 5 franchissements de limites d'anciennes régions (notation ╫) et c'est le maximum :

23 → 19 ╫ 24 ╫ 16 ╫ 87 ╫ 86 → 79 → 17 ╫ 33 → 47 → 40 → 64

4) Dans le parcours, on souhaite qu'un numéro de département impair ne soit jamais précédé et suivi par un numéro pair, et qu'un numéro de département pair ne soit jamais précédé et suivi par un numéro impair. Donnez les parcours qui conviennent.

Il faut toujours au moins deux numéros pairs qui se suivent ou deux numéros impairs qui se suivent. Dans les parcours de la question 2, il n'existe que 4 possibilités.

```
19 → 23   \
            87
23 → 19   /      \
                   24 → 16 → 86 → 79 → 17 → 33 → 47 → 40 → 64
23 → 87   \      /
            19
87 → 23   /
```

Il n'y a pas d'autres possibilités, parce que si on intercale un impair dans le triplet 24, 16, 86, la règle n'est plus respectée.

Jouons avec des cubes

On dispose de petits cubes blancs et de petits cubes rouges, tous d'arête 1 cm. En assemblant 6 de ces petits cubes on forme des pavés d'arêtes 1, 2 et 3 cm. Deux pavés sont considérés comme identiques si on peut passer de l'un à l'autre en les tournant ou en les retournant. Par exemple les quatre pavés suivants sont identiques (on a seulement dessiné la face supérieure des pavés) :

R	R	

R	R	

	R	R

	R	R

1. Quels sont les pavés différents que l'on peut former avec 1 cube rouge et 5 blancs ?
On représentera chaque pavé comme ci-dessus.

Il n'y a que deux possibilités pour placer le cube rouge : soit il est à un angle du pavé, soit il est au milieu d'un grand côté. Il y a donc deux pavés différents :

R		

	R	

2. Quels sont les pavés différents que l'on peut former avec 2 cubes rouges et 4 blancs ?

Première possibilité, les deux cubes rouges sont sur une même rangée horizontale :

R		R

R	R	

Deuxième possibilité, un cube rouge sur chaque rangée horizontale :

R		
R		

	R	
	R	

R		
	R	

R		
		R

3. Quels sont les pavés différents que l'on peut former avec 3 cubes rouges et 3 blancs ?

Première possibilité, les trois cubes rouges sont sur une même rangée horizontale :

R	R	R

Deuxième possibilité, deux cubes rouge côte à côte sur une rangée horizontale :

R	R	
R		

R	R	
	R	

R	R	
		R

Troisième possibilité, deux cubes rouge espacés sur une rangée horizontale :

R		R
R		

R		R
	R	

4. Combien de pavés différents peut-on former avec 6 cubes rouges ou blancs ?
Le nombre de cubes rouges peut varier de 0 à 6.

Il y a une seule possibilité avec 0 cube rouge et une seule possibilité avec 6 cubes rouges.

On a trouvé deux possibilités avec 1 cube rouge, donc également deux possibilités avec 5 cubes rouges (en échangeant rouges et blancs).

On a trouvé six possibilités avec 2 cubes rouges, donc également six possibilités avec 4 cubes rouges (en échangeant rouges et blancs).

On a trouvé six possibilités avec 3 cubes rouges et donc 3 cubes blancs.

Au total cela fait 1 + 1 + 2 + 2 + 6 + 6 + 6 = **<u>24 possibilités</u>**.

C’est stupéfiant !

1. On vérifie que $\frac{16}{64} = \frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} = \frac{1}{4}$. *Dans cette question* ab *désigne le* ***nombre à deux chiffres*** a *et* b.

Pour quels ***chiffres*** a, b *et* c *non nuls, avec* a *différent de* c, *la simplification incorrecte de* $\frac{ab}{bc}$ *en* $\frac{a}{c}$ *donne-t-elle un résultat juste ?*

L'égalité entre $\frac{ab}{bc}$ et $\frac{a}{c}$ est équivalente à $(10a+b)c=(10b+c)a$ ou encore à $9ac+bc=10ab$. Cela s'écrit encore $9ac=9ab+b(a-c)$ qui entraîne que 9 doit diviser $b(a-c)$. Or 9 ne peut pas diviser $a-c$ puisque $a\neq c$. Par suite b est divisible par 3 et il y a trois cas :

pour $b=3$ l'équation devient $9ac+3c=30a$ qui s'écrit encore $(3a+1)(3c-10)=-10$; la seule valeur possible pour c est $c=3$ mais elle ne convient pas puisqu'elle entraîne $a=c=3$.

pour $b=6$ l'équation devient $9ac+6c=60a$ qui s'écrit encore $(3a+2)(3c-20)=-40$; les valeurs possibles pour c sont $c=4$ qui donne $a=1$, $c=5$ qui donne $a=2$ et $c=6$ qui ne convient pas puisque cela entraîne $a=c=6$.

pour $b=9$ l'équation devient $ac+c=10a$ qui s'écrit encore $(a+1)(c-10)=-10$; les valeurs possibles pour c sont $c=5$ qui donne $a=1$, $c=8$ qui donne $a=4$ et $c=9$ qui ne convient pas puisque cela entraîne $a=c=9$.

En conclusion il y a quatre solutions pour le triplet (a,b,c) :
$(1,6,4)$, $(2,6,5)$, $(1,9,5)$ et $(4,9,8)$.

2. On vérifie que $\frac{484}{847}=\frac{4\cancel{84}}{\cancel{84}7}=\frac{4}{7}$ *. Dans cette question* aB *désigne le* ***nombre à trois chiffres*** *formé en juxtaposant* a *et* B*. Pour quels* ***chiffres*** a *et* c *non nuls, avec* a *différent de* c*, et quel* ***nombre à deux chiffres*** *non nuls* B *la simplification incorrecte de* $\frac{aB}{Bc}$ *en* $\frac{a}{c}$ *donne-t-elle un résultat juste ?*

L'égalité entre $\frac{aB}{Bc}$ et $\frac{a}{c}$ est équivalente à $(100a+B)c=(10B+c)a$ qui se simplifie en $99ac+Bc=10aB$ équivalent à $99ac+B(a+c)=11aB$. Cela entraîne que 11 divise $B(a+c)$. Si 11 divise B on peut écrire $B=11b$ et l'équation devient $9ac+bc=10ab$ qui est l'équation de la première question : il y a donc dans ce cas quatre solutions pour le triplet (a,B,c) :
$(1,66,4)$, $(2,66,5)$, $(1,99,5)$ et $(4,99,8)$

Sinon 11 divise $a+c$ d'où l'on déduit que $a+c=11$ puis que $B=\frac{9ac}{a-1}=\frac{9a(11-a)}{a-1}$.

En examinant les différentes valeurs possibles pour le couple (a,c) de façon que B soit un entier à deux chiffres on obtient trois autres solutions pour le triplet (a,B,c) :
$(4,84,7)$, $(6,54,5)$ et $(7,42,4)$

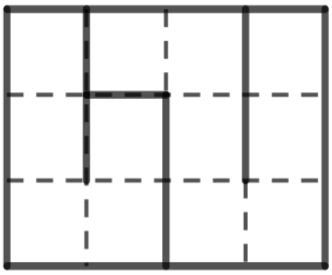
En conclusion il y a sept solutions pour le triplet (a,B,c) :
$(1,66,4)$, $(2,66,5)$, $(1,99,5)$, $(4,99,8)$, $(4,84,7)$, $(6,54,5)$ et $(7,42,4)$

Labyrinthes parfaits

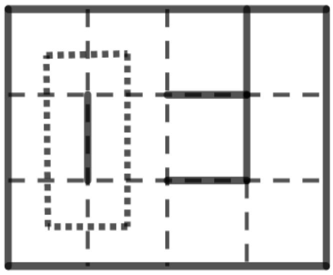
Un labyrinthe de taille (n, p) désigne une grille avec n lignes et p colonnes, donc n × p cases, dans laquelle on a placé des cloisons de longueur 1, chaque cloison séparant deux cases voisines. Un chemin est une succession de segments joignant les centres de deux cases voisines (non séparées par une cloison) et ne revenant jamais en arrière. La longueur d'un chemin est le nombre de cases que traverse le chemin (en comptant les deux cases aux extrémités du chemin).

Un labyrinthe est parfait si :

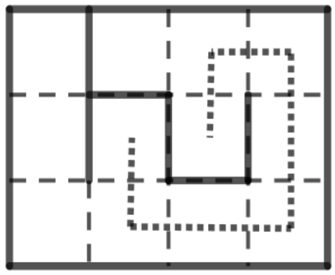
- *il existe toujours un chemin pour aller d'une case à une autre*
- *il n'existe pas de chemin partant d'une case et y revenant après avoir fait une boucle*



Labyrinthe non parfait car il n'existe pas de chemin allant d'un angle à l'angle opposé



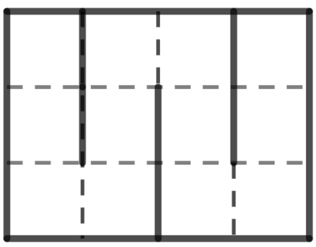
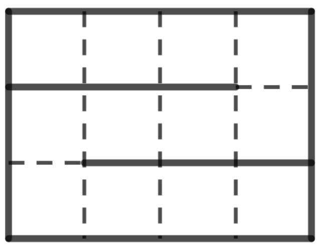
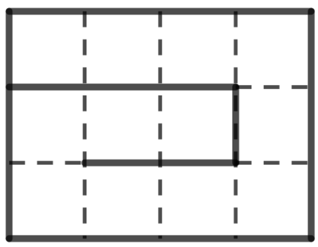
Labyrinthe non parfait car il existe un chemin faisant une boucle



Labyrinthe parfait avec un chemin de longueur 8

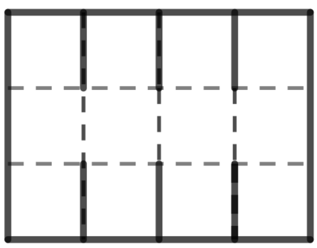
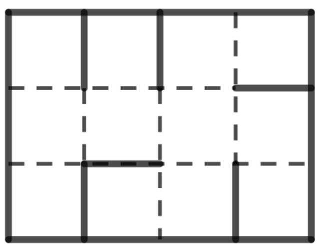
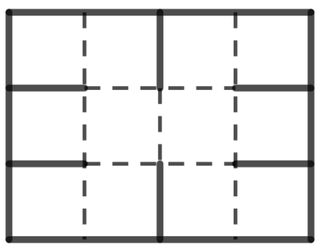
1. Tracer un labyrinthe parfait de taille (3,4) pour lequel il existe un chemin de longueur 12.

Il en existe au moins 17 en ne comptant qu'une fois ceux qui se déduisent l'un de l'autre par une symétrie. En voici 3 :

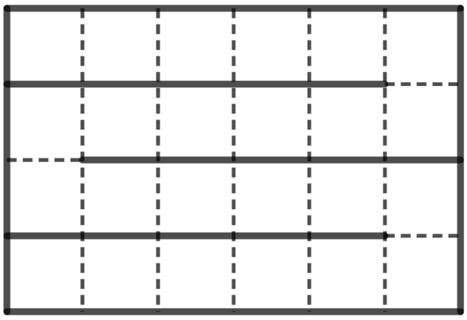
2. Tracer un labyrinthe parfait de taille (3,4) où tous les chemins ont une longueur inférieure ou égale à 6.

Il existe beaucoup de solutions, en voici 3 :

3. Pour tous les entiers n et p, justifiez qu'il existe un labyrinthe parfait de taille (n, p) dans lequel il existe un chemin de longueur n × p

Il suffit de tracer des cloisons de façon à former un chemin décrivant successivement chacune des lignes en allant vers la droite pour les lignes impaires et vers la gauche pour les lignes paires. Comme les n × p cases sont parcourues, le chemin a pour longueur $n \times p$.
Par exemple pour $n=4$ et $p=6$:

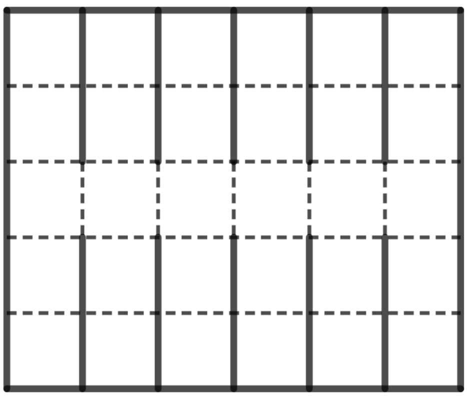


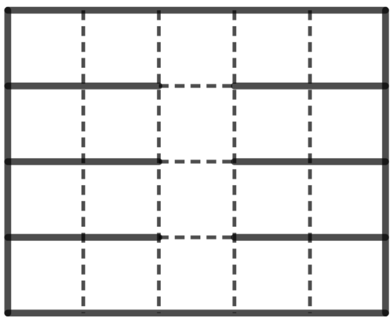
4. Pour tous les entiers n et p et tout labyrinthe parfait de taille (n, p), justifiez qu'il existe un chemin de longueur supérieure ou égale à n + p – 1. Existe-t-il toujours un labyrinthe parfait de taille (n, p) tel que tous les chemins soient de longueur inférieure ou égale à n + p – 1 ?

Un chemin qui va de la case en haut à gauche à la case en bas à droite doit passer $p-1$ fois d'une case à la case située juste à sa droite et $n-1$ fois d'une case à la case située juste en dessous. La longueur de ce chemin, en comptant la case de départ, est donc égale à $1+(n-1)+(p-1)=n+p-1$

Si n est un entier impair, un labyrinthe construit comme le premier exemple de la question 2 a tous ses chemins de longueur inférieure ou égale à $n+p-1$ puisque l'un des plus longs chemins est celui qui va de la case en haut à gauche à la case en bas à droite. Si p est impair on fait la même chose avec des cloisons horizontales.

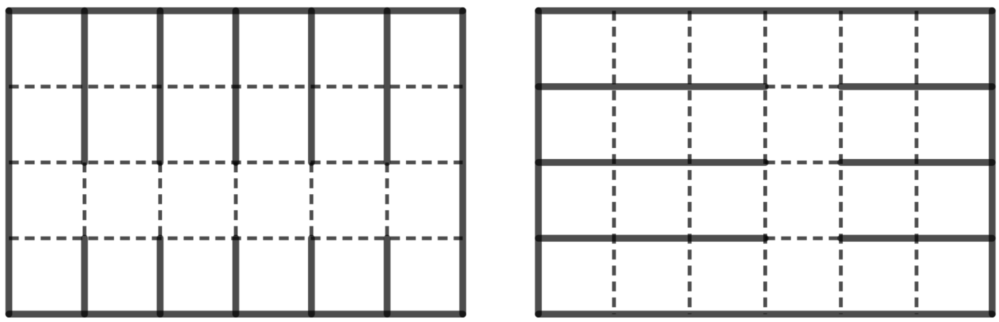
Par exemple pour $n=5$ et $p=6$ ainsi que pour $n=4$ et $p=5$:





Si n et p sont pairs il existe un chemin de longueur au moins égale à $n+p$.
Pour le démontrer on nomme A, B, C et D les quatre cases situées aux quatre coins de la grille :
A en haut à gauche, B en haut à droite, C en bas à droite et D en bas à gauche.
On remarque d'abord qu'il existe un unique chemin reliant deux cases car s'il y en avait deux il existerait un chemin partant d'une case et y revenant après avoir décrit une boucle et c'est interdit.
L'unique chemin qui va de A à C croise l'unique chemin qui va de B à C en au moins une case E (il peut avoir plusieurs cases, on en choisit une).
Cette case E est dans un quart de la grille, par exemple dans le quart en bas à gauche.
Le chemin allant de A à B a alors une longueur au moins égale à $n+p$ puisqu'il y a au moins $p-1$ déplacements vers la droite et que, puisque le chemin passe par E, il y a au moins $\frac{n}{2}$ déplacements vers le bas (pour aller de A à E) et au moins $\frac{n}{2}$ déplacements vers le haut (pour aller de E à B). La longueur du chemin est donc au moins égale à $1+(p-1)+\frac{n}{2}+\frac{n}{2}=n+p$.

Si n et p sont pairs il existe au moins un labyrinthe dans lequel tous les chemins ont une longueur inférieure ou égale à $n+p$. Par exemple pour $n=4$ et $p=6$ voici deux possibilités :



5. Combien y a-t-il de cloisons de longueur 1 dans un labyrinthe parfait de taille (n, p), sans compter le mur qui entoure le labyrinthe ?

De la case A on doit pouvoir rejoindre les $np-1$ autres cases sans traverser de cloison. Pour chaque nouvelle case atteinte on franchit une séparation de cases ne portant pas de cloison. Il y a donc au moins $np-1$ séparations de cases ne portant pas de cloison. S'il y en avait np on atteindrait de deux façons différentes l'une des cases en partant de A donc il existerait un circuit, c'est interdit.

Il y a donc exactement $np-1$ séparations de cases ne portant pas de cloison d'où le nombre de séparations de cases portant une cloison : $n(p-1)+p(n-1)-(np-1)=np-n-p+1=(n-1)(p-1)$
On peut le vérifier sur chacun des exemples donnés.